

# Jeotermal rezervuarı farla ilgili bir matematiksel model

A mathematical model for geothermal reservoirs

NURKAN KARAHANOĞLU, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Jeoloji Mühendisliği Bölümü, Ankara

**ÖZ :** Bu yazıda, sıcak-su tipi jeotermal rezervuarların matematiksel modellenmesi açıklanmakta ve bir model önerilmektedir. Önerilen matematiksel model, üretim yapılan jeotermal sahada oluşabilecek ısı, basınç ve tasman değişikliğini saptayabilmektedir. Bu modelde jeotermal rezervuarda gözlenen sıvı akışı, ısı iletimi ve gerilim dengesi, plastik olarak varsayılan gerilim-deformasyon ilişkisi kullanılarak diferansiyel denklemlerle ifade edilmiştir.

**ABSTRACT •** Mathematical modelling of hot-water type geothermal reservoirs has been described and a model is proposed in this paper. The proposed mathematical model simulates the changes in pressure, temperature and subsidence in a producing geothermal reservoir. In this model the mechanism of fluid flow and heat transfer and the equilibrium of stresses are combined through a plastic stress-strain relationship and expressed by differential equations.

## GÖRÜŞ

1970'U yıllarda gözlenen petrol tarizi, çoğu ülkeyi ve özellikle petrol ithal eden ülkeleri, enerji ihtiyacını fosil yakıtlar yerine ikincil kaynaklara yönelmeye zorlamıştır. Bu nedenle tüm dünyada, jeotermal enerji birdenbire büyük önem kazanmıştır. Bugün bilindiği üzere birçok ülkede jeotermal enerji ikincil enerji kaynağı olarak kullanılmaktadır. Bu ülkelere örnek olarak; Yeni Zelanda, İtalya, İzlanda, Sovyetler Birliği ve Japonya gösterilebilir.

Jeotermal rezervuarların (genelde tüm rezervuarların) üretim, rezervuarda zamanla gözlenen basınç ve ısı düşümlerine neden olmaktadır. Yapılan sıcak su ve/veya buhar üretimi rezervuarda ısı ve basınç değişimi yaratmakta bu ise rezervuar ortamındaki gerilim-birim deformasyon eşitliğini bozmaktadır. Aynı şekilde rezervuardan yapılan üretim ısı ve sıvı akımı mekanizmalarını da etkilemektedir. Böylece gözenekli ortamda üretim esnasında oluşan gerilim-birim deformasyon, ısı ve sıvı akımı mekanizmaları aynı anda birbirleri ile ve esas olarak üretim ile etkilenmektedir. Bu nedenle böyle bir sistemi modelleyecek, adı geçen parametre (ısı, basınç, birim-deformasyon) değişikliğini saptayabilecek bir model jeotermal saha için en uygun üretim politikasını çıkartabilecek ve böylece jeotermal rezervuarın ömrünü uzatabilecektir.

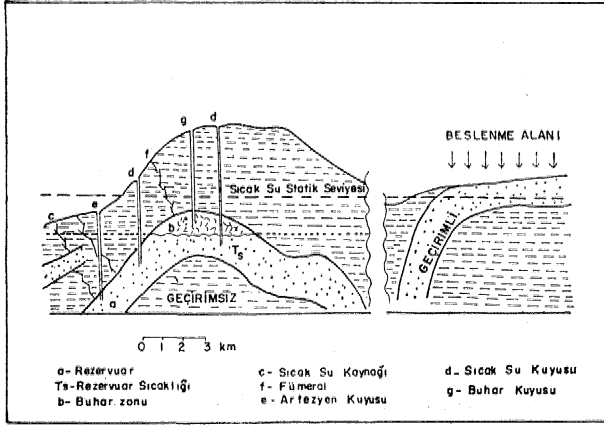
## JEOTERMAL ENERJİ

Jeotermal enerji isminden de anlaşıldığı üzere dünyanın iç enerjisi ya da ısı enerjisi olarak tanımlanır.

Yer kabuğunun üst kısımlarında depolanan bu enerji değişik şekillerde oluşabilmektedir. Oluşum değişikliği göz önüne alındığında üç değişik jeotermal enerji kaynağı tanımlanabilir (Faust ve Mercer, 1979). Hidrotermal olarak bilinen birinci sistem, yeryüzeye yakın magmatik kütlelerin ısıttığı akışkanların gözenekli ortamda birikmesi sonucu oluşan Sıcak su veya Buhar tipli jeotermal rezervuarları içermektedir. Kızgın-Kuru-Kaya sistemi ise çok düşük geçirgenliğe sahip kayaların, hidrotermal sistemlerde olduğu gibi magmatik ısı kaynağı ile ısıtılmaları sonucu oluşmaktadır. Yüksek Basıncılı Sistemler olarak bilinen jeotermal sahalar ise jeosenklineal çökeltilerde kapanan suyun çok yüksek ısı ve basınca maruz kalması ile oluşur.

Hidrotermal rezervuarların yapısını ortaya koymak amacıyla çok sayıda fiziksel model geliştirilmiştir (Tezcan, 1971; White ve diğerleri, 1971; White, 1973). Tüm bu modellerin ortak yanı hepsinin ısı kaynağı, gözenekli rezervuar kayaç, geçirimsiz örtü kayası ve döngü sistemi içermeleridir. Bu modellere örnek olarak Şekil 1'deki sistem verilebilir. Şekilde görüldüğü gibi, teorik kökenli su derin seviyelere süzülerek ısınmakta ve daha sonra uygun bir gözenekli ortamda birikerek hidrotermal sistem oluşturmaktadır.

Gerek jeolojik yapısı ve gerekse plaka tektoniğinde yerini göz önüne alındığında, Türkiye'nin yeterli düzeyde jeotermal enerji potansiyeline sahip olduğu bilinmektedir (Erentöz, 1971; Kurtman ve Şamilgil, 1975; Şimşek, 1982; Şimşek ve Eroskay,



**Şekil 1. Bir Jeotermal Saha Modeli (Tezcan, 1971'den)**  
**Figure 1 : A Geothermal Field Model (Tezcan, 1971)**

1983), Elektrik enerjisi açısından az da olsa katkısı olacağı bilinen jeotermal enerjinin en uygun koşullarda üretilmesi gerekmektedir. Bu amaca yönelik olarak geliştirilen sayısal modellerin ne denli yararlı olacağı son derecede açıktır.

Bu yazıda jeotermal rezervuarların matematiksel modellenmesi genel olarak açıklanmakta ve bir model önerilmektedir. Önerilen model, üretim yapılan jeotermal sahada oluşabilecek ısı, basınç ve tasman değişikliklerini saptayabilmektedir,

#### MATEMATİKSEL MODEL

ÖzelHMe enerji krizinden sonra bilim adamları jeotermal rezervuarların modellenmesi konusunda çok sayıda çalışma yapmışlar ve çeşitli modeller (sayısal, matematiksel) geliştirmişlerdir. Ancak bu modellerin bir kısmı rezervuarda oluşabilecek olan çökmeyi göz önüne almamakta ve sadece basınç ve ısı dağılımlarını saptamaktadır.

Tasman değişimiMiğni amaçlamayan modeller, gözenekli ortamdaki kütle\* momentum ve enerji eşitlikleri ile tanımlanabilen enerji ve sıvı akışı iletişim ilişkileri kullanılarak oluşturulmaktadır. Bu şekilde hazırlanan modeller arasında Mercer ve diğ\* (1974) ileri sürdüğü model iki fazlı bir hidrotermal rezervuarda basınç ve entalpi dağılımını kontrol eden diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır. Mercer, Pinder ve Donaldson (1975) tek fazlı bir benzeşim modelini Yeni Zelanda'daki Wairakei Jeotermal Sahasına uygulamışlar ve rezervuardan buhar üretilene kadar son derecede başarılı bir uygulama elde etmişlerdir. Ancak modelleri ortam İM fazlı olunca (buhar üretilmeye başlayınca) ilk dönemdeki başarısızlığın yitirmiştir. Ne var ki bu çalışma en azından jeotermal sahalarda Galerkin Sonlu Elemanlar yönteminin kullanılabilmesini ilk olarak ispatlamıştır. Daha sonra Faust ve Mercer (1975) bu problemi (faz değişikliği) ortadan kaldıran bir model geliştirmişlerdir. Yine buna benzer teorik bir çalışma ve onun laboratuvar modele uyarlanması Garg ve diğ, (1975) tarafından

gerçekleştirilmiştir. Aynı şekilde Lasseter ve diğ, (1975)'nin ileri sürdüğü model ısı ve kütle iletişim denklemlerini kullanmakta ve çözüm ise akışkan özgül ağırlığı ve iç enerji dağılımı için bulunmaktadır. Toronyi ve Farouq Ali (1977) iki boyutlu, iki fazlı bir model geliştirmişler ve bu model çalışmasında değişik porozite değerlerinin, geçirgenlik katsayısının, basıncının ve sıvı fazı oranının üretime etkisini araştırmışlardır. Sonuçta oluşturulan model sonlu farklar yöntemi ile çözümlenerek, sıvı fazı oranı ve basınç dağılımı için çözüm elde edilmiştir. Thomas ve Pierson (1978) tarafından geliştirilen model jeotermal rezervuarları üç boyutlu olarak modelleyebilmekte ve ayrıca sıvı fazı rezervuarın neresinde ve ne durumda (sıvı/buhar) olursa olsun benzeşimi gerçekleştirebilmektedir. Faust ve Mercer (1979) ise üç boyutta hazırladıkları diferansiyel denklemleri z boyutunda ortalama olarak iki boyuta indirgemişler ve böylece oluşan modelin çözümünü basınç ve entalpi için gerçekleştirmişlerdir.

Yukarıda özetlenen çalışmalar yanında rezervuarlarda gözlenen çökmeyi modelleyen çalışmalar da bulunmaktadır. Bunlardan Verruijt (1969)'in araştırması yeraltısı akiferlerinde elastik depolamayı gerçekleştiren esas denklemleri özetlemektedir. Depolama denklemleri birim gerilim ve birim deformasyon cinsinden ve elastik denge denklemleri kullanılarak açıklanmıştır» Fmol ve© Farouq Ali (1975) aynı yöntemi kullanarak petrol rezervuarında üretim sonucu meydana gelen çökmeyi modellemiştir. İki boyutlu, iki fazlı (petrol, gaz) ortam için geliştirilen bu model süreklilik analizi ve denge denklemleri kullanılarak birim deformasyon ve boşluk basıncı için çözülmüştür\* Bratsaert ve Çorapçioğlu (1976) ise visko-elastik bir ortamda yeraltısı akımını modellemiştir/Çorapçioğlu (1976) yaptığı çalışmada sızımli bir yeraltısı akiferinde gözlenen çökme mekanizmasını araştırmış ve visko-elastik gerilim-birim deformasyon ilişkisi kullanarak bu olayı çözümlenmiştir. Narasimhan ve Witherspoon (1977) geliştirdikleri teorik çalışmada değişik doyumda bozulabilir bir gözenekli ortam için yeraltısı akımını modellemiştir. Bu model, boşluk basıncı ile etkili gerilimin doyumluluk cinsinden ifadesini gerektirmektedir» Jeotermal rezervuarlarda gözenekli ortam ile sıvı ve ısı akışkanlığını tam olarak iletişim durumunda Brownell, Jr, ve diğ, (1977)'nin ileri sürdüğü çalışma göz önüne almaktadır. Bu modelde momentum ve enerji iletişimi ve diğer taraftan porozite ile geçirimliliğin akışkan ve kayaç gerilimlerine bağımlı olarak alınması ayrıntılı şekilde verilmiştir.

Diğer taraftan Lewis ve Karahanoğlu (1981) ve Karahanoğlu (1983), jeotermal rezervuarda üretime karşı gözlenen sıcaklık, basınç ve tasman değişimlerini sıvı ve enerji iletişimi ile çökme mekanizmalarını birbirleri ile tam girişimli olarak alan bir model geliştirmişlerdir. Bu modelde gerilim-birim deformasyon ilişkisi elasto-plastik olarak varsayılmıştır. Ayrıca model Kızıldere Jeotermal Sahasında bir

kuyuya uygulanmış ve deneme üretimi değerleri için yapılan benzeşim çalışması çok başarılı sonuç vermiştir (Karahanoğlu, N., ve diğerleri, 1984).

Tüm bu çalışmalar göz önüne alınarak gözenekli ortamda ısı ve sıvı akımını ve bunlara ek olarak rezervuar çökmesini de inceleyen, tek fazlı (sıcak su) jeotermal rezervuarlarının benzeşiminde kullanılabilir bir model önerilmiştir. Rezervuarda üretim esnasında gözlenen çökme mekanizması, alışlagelmiş elastik ilişki yerine plastik gerilim-birim deformasyon ilişkisi kullanılarak modellenmektedir. Böylece oluşturulan matematiksel model, birbirleri ile tam girişimli olan sıvı akımı ve enerji iletimini ile plastik gerilim-birim deformasyon denklemlerini içermektedir.

Sıvı Akış Denklemi

Gözenekli ortamda sıvı ve katı fazlar için denge denklemleri,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{8(C_j)pw}{\partial t} \dots (i)$$

ve

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{9\{d^{TM}Ct\}ps}{3t} \dots (2)$$

şeklinde yazılmaktadır. Bu denklemlerde (J) poroziteyi, p ve p sıvı ve katı faz yoğunluğunu, W ve |J ise sıvı ve katı fazların ilk durumlarına göre deplasmanlarını göstermektedir, (2) nolu denklemde katı faz için birim tanecik yoğunluğu sabit olarak varsayıldığında,

$$V \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{3U}{3t} - \frac{3(t)}{at} \dots (j)$$

denklemi elde edilmektedir. Diğer taraftan rezervuarda gözlenebilen çökme mekanizması da araştırılacağından Darcy kanununun sıvı hareketi dikkate alınarak aşağıdaki şekilde yazılması gerekmektedir :

$$\frac{3W}{at} - \frac{9U}{at} = - \frac{k}{pw.g} \cdot v_p \dots (4)$$

Bu denklemde k hidrolik iletkenliği, g yerçekimi ivmesini ve P ise rezervuar basıncını göstermektedir,

(1), (3) ve (4) nolu denklemler kullanılarak ve terimi aşağıdaki eşitlik ile sıvının sıkıştılabilmeye katsayısı olan β ile

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \beta \rho w \frac{\partial p}{\partial t} \dots (5)$$

ifade edildiğinde, sıvı akış denkleminin en son şekli (Çorapçıoğlu ve Karahanoğlu, 1980)

$$\frac{3\epsilon}{at} + \beta \rho \frac{\partial p}{at} - V \left\{ \frac{k}{pwg} \cdot VP \right\} = \dots (k)$$

elde edilir. Bu denklem oluşturulurken katı faz deformasyonu toplam birim-deformasyon (ε = "s7M) cınMnden alınmıştır.

Enerji Denklemi;

Birim hacim için enerji denge denklemi

$$V(x \cdot VT) - V \left\{ (pc)_w \frac{3W}{at} \cdot T \right\} = \frac{9}{at} \{ (pc)^* T \} \dots (7)$$

şeklinde verilmektedir (Combarrous ve Borles, 1975). Burada

$$(pe)^* = (pc)_t (1-Cb) + (pc)_w (f) \dots (8)$$

eşitliği kullanılmıştır. Bu iki denklemde görülen x terimi ısı iletkenliğini, (pc)<sub>w</sub> sıvı ve katı fazların ısı kapasitelerini ve T ise ortam sıcaklığını göstermektedir. Yukarıda verilen (7) nolu enerji denge denklemi Darcy Kanunu kullanılarak

$$V(x \cdot VT) - V \left\{ f(pc)_w \left[ - \frac{k}{pwg} Vp + (1) \right] \right\} = \frac{9}{at} T \dots (9)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem gözenekli ortamda ısı dağılımını açıklamaktadır.

Gerilim-Birim Deformasyon Denklemleri

Plastik özellik içeren maddeler için gerilim-birim deformasyon ilişkisi Mendelson (1968) tarafından Akış Kanunu olarak bilinen

$$d\epsilon^p = \alpha \frac{df}{da} \dots (io)$$

eşitliği ile tanımlanmıştır. Burada X<sub>D</sub> orantı sabiti dε<sup>p</sup> ise plastik birim-deformasyon değişimini ifade etmektedir, f ise malzemenin yenilme (yield) fonksiyonunu göstermekte diğer bir deyişle plastik deformasyonun başlama ortamını tanımlamaktadır,

Çorapçıoğlu ve Uz (1978) yaptıkları çalışmada gözenekli ortamların yenilme fonksiyonlarını incelemişler ve diğer çalışmalarla karşılaştırarak bu fonksiyonun

$$Y^2 = A J_1 - B J^{\wedge} \dots (11)$$

şeklinde ifade edilebileceğini ileri sürmüşlerdir. Bu eşitlikte y bir eksenli sıkıştırma deneyindeki gerilimi, J<sub>x</sub> ve J<sup>^</sup> ise gerilimin birinci invariantı ile gerilim sapmasının ikinci invariantını, A ve B ise poroziteye bağlı katsayıları göstermektedir. Böylece yutandaki eşitlikle ifade edilen yenilme fonksiyonu (10) nolu denklem kullanılarak âg için bir ilişki bulunabilir. Bu yönde yapılacak bir çalışmada, ısının yenilme fonksiyonuna etkisi araştırılarak ısı değişkeni de bir etmen olarak denklem sistemine alınabilir,

SONUÇLAR

Sıvı akışı ve enerji iletim denklemleri (6 ve 9 nolu denklemler), gerilim-birim deformasyon ilişkileri (10 nolu denklem) kullanıldığında, jeotermal rezervuarlarda basınç, sıcaklık ve tasman değişikliklerini modelleyebilen bir matematiksel model oluşturulmaktadır. Rezervuar basıncı, rezervuar sıcaklığı ve tasman cinsinden ifade edilen bu modelin uygun sınır ve başlangıç koşulları ile sayısal çözümü, re-

zervuar içerisinde uzaklık boyutu ve zaman boyutunda adı geçen bir değişkenin dağılımı verecektir. Böylece değişik üretim koşulları karşısında jeotermal sistemin ne şekilde davranacağı saptanabilecektir.

#### DEĞİNİLEN BELGELER

- Browadl, Jr., D. H., Garg, S.X., ve Pritchett, J.W., 1977, Governing equations for geothermal reservoirs: *Water Resour. Res.*, 13, 6, 929-934.
- Brutsaert, W., ve Çorapçioğlu, M.Y., 1976, Pumping of aquifers with visco-elastic properties: *J. Hydr. Div., ASCE*, HY 11, 16634675.
- Combarous, M.A., ve Bories, S.A., 1975, Hydrothermal convection in saturated porous media: *Adv. in Hydroscience*, ed. Van Te Chow, Academic Press, 10, 231-307.
- Çorapçioğlu, M.Y., 1976, Mathematical modelling of leaky aquifers with rheological properties: *Proc. of Anaheim Symp.*, Dec 1976, 191-200.
- Çorapçioğlu, M.Y., ve Karahanoğlu, M., 1980, Simulation of geothermal production: in T. Nejat Veziroğlu, ed. *Alternative Energy Sources II*, New York, Hemisphere Publ. Co., 19854918.
- Çorapçioğlu, M.Y., ve Üz, T., 1978, Constitutive equations for plastic deformation of porous materials: *Powder Technology*, 21, 269-274.
- Erentöz, C., 1971, Jeotermal enerji araştırmaları üzerine bazı düşünceler: *Türkiye Jeotermal Enerji Simp.*, Ankara, 13-20.
- Faust, R.C., ve Mercer, J.W., 1975, Mathematical modelling of Geothermal systems: *Proc. 2nd UN Symp. on the Development and Use of Geothermal Resources*, San Francisco, California, 3, 16334642.
- Faust, R.C./ve Mercer, J.W., 1979, Geothermal reservoir simulation I, Mathematical models for liquid and vapor-dominated hydrothermal systems: *Water Resour. Res.*, 15, 1, 23-30.
- Finol, A., ve Farouq Ali, S.M., 1975, Numerical simulation of oil production with simultaneous ground subsidence: *SPEJ*, (Oct 1975), 411-424.
- Garg, S.K., ve Pritchett, J.W., ve Brownell, Jr., D.H., 1975, Transport of mass and energy in porous media: *Proc 2nd UN Symp. on the Development and Use of Geothermal Resources*, San Francisco, 3, 16514656.
- Karahanoğlu, N., 1983, Finite element simulation of hot-water type geothermal reservoirs: *Doktora Tezi*, ODTÜ, Ankara, 127s (yayımlanmamış).
- Karahanoğlu, N., Doyuran, V., ve Akkaş, N., 1984, Finite element simulation of hot-water type geothermal reservoirs: *J. of Geol. and Geothermal Res.*, 23, 357-382.
- Kurtman, F., ve Şamilgil, E., 1975, Geothermal energy possibilities, their exploration and evaluation in Turkey: *Proc. 2nd UN Symp. on the Development and Use of Geothermal Resources*, San Francisco, California, 3, 447-457.
- Lasseter, T.J., Witherspoon, P.A. ve Lippmann, M.X., 1975, The numerical simulation of heat and mass transfer in multidimensional two phase geothermal reservoirs: *Proc. 2nd UN Symp. on the Development and Use of Geothermal Resources*, San Francisco, 3, 17154725.
- Lewis, R.W., ve Karahanoğlu, N., 1981, Simulation of subsidence in geothermal reservoirs: in Lewis, R.W., Morgan, K., ve Schrefler, B.A., ed., *Numerical Methods in Thermal Problems*, Proc. 2nd Int. Conf. in Venice: Swansea, Pineridge Press, II, 326-335.
- Mendelson, A., 1968, *Plasticity: Theory and Application*, McMillan Co., New York.
- Mercer, J.W., Faust, R.A., ve Finner, G.F., 1974, Geothermal reservoir simulation: *Proc. Conf. on Research for the Development of Geothermal Energy Resources*, Pasadena, California, 256467.
- Mercer, J.W., Finner, G.F., ve Donaldson, I.G., 1975, A Galerkin finite element analysis of the hydrothermal system at Wairakei, New Zealand: *J. Geoph. Res.*, 80, 17, 26084621.
- Narasimhan, T.N., ve Witherspoon, P.A., 1977, Numerical model for saturated-unsaturated flow in deformable porous media: *J. Geoph. Res.*, 82, 3, 657-664.
- Şimşek, Ş., 1982, Geology, geochemistry and geothermal model of the Kizildere field: *Proc. I, Turkish-Italian Seminar on Geothermal Energy*, Ankara, 2, 1-25.
- Şimşek, Ş., ve Eroskay, O., 1983, DenMi-Kizildere alanının jeotermal enerji potansiyeli: *Mühendislik Jeolojisi Türk Milli Komitesi Bülteni*, 5, 944.
- Tezcan, K., 1971, Sarayköy-Kızıldere jeotermik enerji sahasında kuru buhar üretim imkanı: *Türkiye Jeotermal Enerji Simp.*, Ankara, 89400.
- Toronyi, R.M., ve Farouq Ali, S.M., 1977, Two-phase two-dimensional simulation of a geothermal reservoir: *SPEJ*, -(June 1977), 171483.
- Thomas, K.L., ve Pierson, R.G., 1978, Three-dimensional geothermal reservoir simulation: *SPEJ*, (April 1978), 151461.
- Verruijt, A., 1969, *Elastic storage of aquifers: to Flow Through Porous Media*: ed., De Wiest, J.M., Academic Press, New York, 331-376.
- White, D.E., 1973, *Characteristics of geothermal resources: Geothermal Energy, Resources, Production, Stimulation*: ed., Kruger, P., and Otte, C., Stanford University Press, Stanford, California, 69-94.
- White, D.E., Muffler, L.P.J., ve Traesdel, A.H., 1971, Vapor dominated hydrothermal systems compared with hotwater systems: *Econ. Geol.*, 66, 75-97.

Yazınm geUş tarihi: 11.1986

Düzeltilmiş yasmn geUf tarihi: 26.10.1986

Yayına verilmiş tarihi: 20.1987